ADVANCES IN MATHEMATICS **41**, 1–39 (1981)

Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi

DOMINIQUE DUMONT

Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Strasbourg 67084, France

INTRODUCTION

Ce travail a trait principalement aux fonctions elliptiques *sn*, *cn* et *dn* de Jacobi. En analysant le calcul de leurs coefficients de Taylor à l'origine selon une méthode due à Schett [25], on peut interpréter ceux-ci de manière combinatoire. La nature formelle de ces calculs permet aussi l'introduction de quatre fonctions notées *Sn*, *Cn*, *Dn* et *En*, qui sont une extension des fonctions de Jacobi, mais ne sont pas elliptiques car elles paramètrent une courbe algébrique de genre cinq.

La partie combinatoire de ce travail (Sections 6, 7 et 8) consiste à étudier la notion de pic de cycle dans les permutations, qui s'avère assez féconde pour fournir des traductions énumératives des coefficients des fonctions de Jacobi, des polynomes de Schett, de la fonction *Cn*, et de l'intégrale de Legendre de première espèce $F(\varphi, k)$.

L'auteur est reconnaissant au professeur M.-P. Schützenberger de lui avoir suggéré une approche des ces questions à partir de la récente contribution de A. Schett.

1. LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI

Dans tout l'article nous étudions les fonctions elliptiques, et d'autres fonctions, sous le seul angle de leurs séries de Taylor formelles à l'origine. Par abus de langage, nous utiliserons souvent le terme de "fonction" pour désigner ces séries formelles. C'est ainsi que nous appelons fonctions elliptiques de Jacobi $sn(u; a, b)$, $cn(u; a, b)$ et $dn(u; a, b)$ les trois séries formelles en u, a, b solutions du système différentiel

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du} sn(u; a, b) = cn(u; a, b)\, dn(u; a, b), && sn(0; a, b) = 0;\\
&\frac{d}{du} cn(u; a, b) = a^2\, dn(u; a, b)\, sn(u; a, b), && cn(0; a, b) = 1; \quad (1.1)\\
&\frac{d}{du} dn(u; a, b) = b^2\, sn(u; a, b)\, cn(u; a, b), && dn(0; a, b) = 1.
\end{aligned}$$

0001-8708/81/070001-39$05.00/0

Ces trois équations permettent de calculer les termes de ces séries de proche en proche, suivant les puissances croissantes de u.

$$\begin{aligned} sn(u; a, b) &= u + (a^2+b^2)\frac{u^3}{3!} + (a^4 + 14a^2b^2 + b^4)\frac{u^5}{5!} + \cdots, \\ cn(u; a, b) &= 1 + a^2\frac{u^2}{2!} + (a^4 + 4a^2b^2)\frac{u^4}{4!} \\ &\quad + (a^6 + 44a^4b^2 + 16a^2b^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots, \\ dn(u; a, b) &= 1 + b^2\frac{u^2}{2!} + (4a^2b^2 + b^4)\frac{u^4}{4!} \\ &\quad + (16a^4b^2 + 44a^2b^4 + b^6)\frac{u^6}{6!} + \cdots. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} sn(u; a, b) &= sn(u; b, a), \\ dn(u; a, b) &= cn(u; b, a). \end{aligned} \tag{1.3}$$

On revient à la notation classique [18] des fonctions de Jacobi en posant

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= sn(u; i, ik), \\ cn(u, k) &= cn(u; i, ik), \\ dn(u, k) &= dn(u; i, ik). \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'avantage de notre notation est qu'elle évite l'alternance de signes dans les développements (1.2); le coefficient de $u^n/n!$ est un polynome homogène en a et b, et on passe de $cn\,u$ à $dn\,u$ en permutant a et b selon (1.3).

Notons les dégénérescences suivantes:

$$\begin{aligned} sn(u; a, 0) &= \frac{sh\, au}{a}, \\ cn(u; a, 0) &= ch\, au, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} sn(u; a, a) &= \frac{tg\, au}{a}, \\ cn(u; a, a) &= \frac{1}{\cos au}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

D'autre part les trois fonctions sont reliées par les identités bien connues (qu'on vérifiera en différentiant par rapport à u):

$$\begin{aligned} cn^2(u; a, b) &= 1 + a^2 sn^2(u; a, b), \\ dn^2(u; a, b) &= 1 + b^2 sn^2(u; a, b). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Par suite, la fonction $sn(u; a, b)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{du} = [(1 + a^2y^2)(1 + b^2y^2)]^{1/2}, \qquad y(0) = 0, \tag{1.8}$$

et peut donc se définir en inversant l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^y [(1 + a^2t^2)(1 + b^2t^2)]^{-1/2}\, dt. \tag{1.9}$$

Il semble que Lagrange soit le premier auteur à avoir utilisé cette forme symétrique des intégrales elliptiques de première espèce dans sa classification [18, p. 12]. Nous ferons également usage des classiques [17, p. 809] formules d'addition des arguments. Pour $sn(u; a, b)$, que nous notons de façon abrégée $sn\, u$, la formule d'addition prend la forme suivante

$$sn(u + v) = \frac{sn\, u\, cn\, v\, dn\, v + sn\, v\, cn\, u\, dn\, u}{1 - a^2b^2\, sn^2\, u\, sn^2\, v}. \tag{1.10}$$

Revenons aux développements (1.2). Si l'on veut pousser plus loin le calcul des coefficients, le système (1.1) oblige à effectuer des produits de séries. On peut aussi identifier les coefficients dans l'équation différentielle de chaque fonction prise séparément, par exemple dans (1.8), ou dans une équation déduite par dérivation de celle-ci (cf. [20]). Cette méthode, couramment utilisée au siècle dernier, a conduit notamment aux travaux de Désiré André [1], mais c'est Schett [25, 26] qui, récemment, a imaginé la méthode qui nous paraît la plus simple et la plus efficace, et que nous allons à présent exposer.

2. Le calcul des derivees successives d'apres Schett

Schett calcule les dérivées successives de chacune des fonctions elliptiques à l'aide des trois fonctions, et considère à cet effet une suite d'entiers à trois indices donnés par une récurrence linéaire simple.

Nous présentons ici une version renouvelée de sa méthode, en introduisant une suite de polynomes à trois variables, que nous appelons *polynomes de*

Schett initialisés en x. Ce sont les polynomes $X_n(x, y, z)$ définis par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} X_0 &= x, \\ X_n &= yz\frac{\partial}{\partial x}X_{n-1} + zx\frac{\partial}{\partial y}X_{n-1} + xy\frac{\partial}{\partial z}X_{n-1} \qquad (n \geqslant 1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous introduisons aussi leur fonction génératrice

$$X(u; x, y, z) = \sum_{n \geqslant 0} X_n(x, y, z)\frac{u^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Le début de ce développement est le suivant, chaque terme en u étant rangé suivant les puissances croissantes de x et décroissantes de y:

$$\begin{aligned} X(u; x, y, z) = x &+ yz\,u \\ &+ \begin{pmatrix} xy^2 \\ +xz^2 \end{pmatrix}\frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} y^3z & \\ +yz^3 + 4x^2yz \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!} \\ &+ \begin{pmatrix} xy^4 & \\ +14xy^2z^2 + 4x^3y^2 \\ +xz^4 + 4x^3z^2 \end{pmatrix}\frac{u^4}{4!} \\ &+ \begin{pmatrix} y^5z & \\ +14y^3z^3 + 44x^2y^3z \\ +yz^5 + 44x^2yz^3 + 16x^4yz \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} + \cdots. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le résultat de Schett s'exprime de façon sommaire en disant que les coefficients du développement de $sn\,u$ (resp. de $cn\,u$) s'obtiennent en prenant dans (2.3) les termes constants en x (resp. en y ou en z).

Nous obtiendrons ce résultat comme conséquence du calcul que nous allons faire de la fonction génératrice $X(u; x, y, z)$.

Considérons pour cela le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dX(u)}{du} &= Y(u)\,Z(u), \qquad X(0) = x, \\ \frac{dY(u)}{du} &= Z(u)X(u), \qquad Y(0) = y, \\ \frac{dZ(u)}{du} &= X(u)\,Y(u), \qquad Z(0) = z. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les solutions $X(u)$, $Y(u)$ et $Z(u)$ de ce système satisfont, d'après la relation de récurrence (2.1), l'identité

$$\frac{d^n}{du^n} X(u) = X_n(X(u), Y(u), Z(u)). \tag{2.5}$$

En posant $u=0$, on constate que $X(u)$ n'est autre que notre fonction génératrice $X(u; x, y, z)$, de même que $Y(u)$ et $Z(u)$ sont les fonctions génératrices de polynômes de Schett Y_n et Z_n respectivement initialisés en y et en z. Nous allons voir que ces fonctions génératrices sont des fonctions elliptiques.

PROPOSITION 2.1. *La fonction génératrice $X(u; x, y, z)$ s'exprime à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi par la formule*

$$X(u; x, y, z) = \frac{yz\, sn(u; y', z') + x\, cn(u; y', z')\, dn(u; y', z')}{1 - x^2\, sn^2(u; y', z')}, \tag{2.6}$$

où $y' = (y^2 - x^2)^{1/2}$ et $z' = (z^2 - x^2)^{1/2}$.

Démonstration. Les trois fonctions $[X(u)]^2$, $[Y(u)]^2$ et $[Z(u)]^2$ ayant même dérivée $2X(u)\, Y(u)\, Z(u)$, elles ne diffèrent que par des constantes. D'après les conditions initiales, on déduit

$$\begin{aligned} [Y(u)]^2 &= [X(u)]^2 + y^2 - x^2, \\ [Z(u)]^2 &= [X(u)]^2 + z^2 - x^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

La fonction $X(u)$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{du} = [(X^2 + y^2 - x^2)(X^2 + z^2 - x^2)]^{1/2}, \qquad X(0) = x, \tag{2.8}$$

et s'obtient en inversant l'intégrale elliptique

$$u = \int_x^X [(t^2 + y^2 - x^2)(t^2 + z^2 - x^2)]^{-1/2}\, dt. \tag{2.9}$$

En posant $y' = (y^2 - x^2)^{1/2}$, $z' = (z^2 - x^2)^{1/2}$, et $\tau = t/y'z'$, on obtient

$$u = \int_{x/y'z'}^{X/y'z'} [(1 + y'^2\tau^2)(1 + z'^2\tau^2)]^{-1/2}\, d\tau.$$

D'après (1.9),

$$u = [\operatorname{Arg} sn(u; y', z')]_{x/y'z'}^{X/y'z'}$$

et

$$X(u) = y'z' \, sn(u + \operatorname{Arg} sn(x/y'z'); y', z'). \tag{2.10}$$

Appliquons la formule d'addition (1.10), en notant que

$$cn(\operatorname{Arg} sn(x/y'z')) = (1 + y'^2x^2/y'^2z'^2)^{1/2} = z/z',$$
$$dn(\operatorname{Arg} sn(x/y'z')) = y/y',$$

et nous obtenons la formule (2.6). ∎

Remarque. D'autres expressions peuvent être données pour $X(u)$. Ainsi, d'après (2.7) et (2.10) on a

$$\begin{aligned} Y(u) &= y' \, dn(u + \operatorname{Arg} sn(x/y'z'); y', z'), \\ Z(u) &= z' \, cn(u + \operatorname{Arg} sn(x/y'z'); y', z'). \end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant les formules d'addition classiques pour *dn* ou *cn* (voir par exemple [24, p. 810]) on trouve

$$Y(u) = \frac{y \, dn(u; y', z') + xz \, sn(u; y', z') \, cn(u; y', z')}{1 - x^2 \, sn^2(u; y', z')}, \tag{2.12}$$

dont on peut déduire une nouvelle expression pour $X(u)$, par permutation des variables.

COROLLAIRE 2.2. *Les développements des fonctions elliptiques de Jacobi s'expriment à l'aide des polynomes de Schett comme suit*

$$\begin{aligned} sn(u; a, b) &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{ab} X_n(0, a, b) \frac{u^n}{n!}, \\ cn(u; a, b) &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{b} Z_n(0, a, b) \frac{u^n}{n!}, \\ dn(u; a, b) &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{a} Y_n(0, a, b) \frac{u^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Démonstration. D'après (2.10) et (2.11) on a en effet

$$\begin{aligned} X(u; 0, a, b) &= ab \, sb(u; a, b), \\ Y(u; 0, a, b) &= a \, dn(u; a, b), \\ Z(u; 0, a, b) &= b \, cn(u; a, b), \end{aligned} \tag{2.14}$$

d'où le résultat annoncé précédemment, dû à Schett. ∎

Notons que

$$Y_n(0, a, b) = X_n(a, 0, b),$$
$$Z_n(0, a, b) = X_n(b, a, 0).$$

Remarquons enfin que la méthode de Schett consiste bien à calculer les dérivées successives des fonctions elliptiques de Jacobi, puisque la relation (2.5) s'écrit encore, dans le cas particulier que nous venons de considérer

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{du^n} sn(u; a, b) &= \frac{1}{ab} X_n(ab\, sn\, u, a\, dn\, u, b\, cn\, u) \\ \frac{d^n}{du^n} cn(u; a, b) &= \frac{1}{b} X_n(b\, cn\, u, ab\, sn\, u, a\, dn\, u). \end{aligned} \tag{2.15}$$

3. Les quatre fonctions $Sn\, u$, $Cn\, u$, $Dn\, u$ et $En\, u$

Les calculs à trois variables faits dans les deux premiers paragraphes suggèrent une extension à quatre variables, que nous abordons en définissant quatre fonctions à partir des fonctions elliptiques, de la même manière qu'on construit classiquement les fonctions elliptiques en partant des fonctions trigonométriques [18, p. 18].

Désignons par $\mathrm{Am}(u; a, b, c)$ la série formelle solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{du} = [1 + c^2\, sn^2(y; a, b)]^{1/2}, \qquad y(0) = 0. \tag{3.1}$$

Posons par définition

$$\begin{aligned} Sn(u; a, b, c) &= sn(\mathrm{Am}(u; a, b, c); a, b), \\ Cn(u; a, b, c) &= cn(\mathrm{Am}(u; a, b, c); a, b), \\ Dn(u; a, b, c) &= dn(\mathrm{Am}(u; a, b, c); a, b), \\ En(u; a, b, c) &= \frac{d}{du} \mathrm{Am}(u; a, b, c). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ces quatre fonctions vérifient les relations quadratiques

$$\begin{aligned} Cn^2\, u &= 1 + a^2\, Sn^2\, u, \\ Dn^2\, u &= 1 + b^2\, Sn^2\, u, \\ En^2\, u &= 1 + c^2\, Sn^2\, u \end{aligned} \tag{3.3}$$

et sont solutions du système différentiel

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du} Sn\,u = Cn\,u\, Dn\,u\, En\,u, && Sn(0)=0,\\
&\frac{d}{du} Cn\,u = a^2\, Sn\,u\, Dn\,u\, En\,u, && Cn(0)=1,\\
&\frac{d}{du} Dn\,u = b^2\, Sn\,u\, En\,u\, Cn\,u, && Dn(0)=1,\\
&\frac{d}{du} En\,u = c^2\, Sn\,u\, Cn\,u\, Dn\,u, && En(0)=1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

qui est une autre manière de les définir, et permet de calculer de proche en proche les premiers termes de ces séries

$$\begin{aligned}
Sn(u; a, b, c) = u &+ \begin{pmatrix} a^2 \\ +b^2 + c^2 \end{pmatrix} \frac{u^3}{3!}\\
&+ \begin{pmatrix} a^4 & & \\ +14a^2b^2 & + 14a^2c^2 & \\ +b^4 & + 14b^2c^2 & + c^4 \end{pmatrix} \frac{u^5}{5!}\\
&+ \begin{pmatrix} a^6 & & & \\ +135a^4b^2 & + 135a^4c^2 & & \\ +135a^2b^4 & + 762a^2b^2c^2 & + 135a^2c^4 & \\ +b^6 & + 135b^4c^2 & + 135b^2c^4 & + c^6 \end{pmatrix} \frac{u^7}{7!} + \cdots,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
Cn(u; a, b, c) = 1 + (a^2)\frac{u^2}{2!} &+ \begin{pmatrix} a^4 \\ +4a^2b^2 + 4a^2c^2 \end{pmatrix} \frac{u^4}{4!}\\
&+ \begin{pmatrix} a^6 & & \\ +44a^4b^2 & + 44a^4c^2 & \\ +16a^2b^4 & + 104a^2b^2c^2 & + 16a^2c^4 \end{pmatrix} \frac{u^6}{6!} + \cdots.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

et de même pour Dn et En par permutations de a, b, c.

Ces fonctions sont une extension des fonctions elliptiques de Jacobi, puisqu'elles se réduisent à celles-ci pour $c = 0$. Comme nous le verrons plus loin, elles ne se classent pas parmi les fonctions elliptiques. En revanche, leurs carrés sont des fonctions elliptiques.

En effet, d'après (3.3) et (3.4), $y = Sn\,u$ est solution de

$$\frac{dy}{du} = [(1 + a^2y^2)(1 + b^2y^2)(1 + c^2y^2)]^{1/2}, \qquad y(0) = 0, \tag{3.7}$$

et s'obtient donc par inversion de l'intégrale

$$u = \int_0^y \frac{dx}{[(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)(1+c^2x^2)]^{1/2}}. \tag{3.8}$$

Bien que le polynome sous le radical soit de degré 6, et que, de ce fait, cette intégrale soit hyperelliptique, on sait classiquement la ramener à une intégrale elliptique, le polynome étant en x^2. Nous pouvons donc exprimer ces quatre fonctions à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi ou de celles de Weierstrass, suivant que nous réduisons l'intégrale à la forme normale de Legendre ou à celle de Weierstrass, ce que nous allons faire successsivement car nous utiliserons les deux formes par la suite.

PROPOSITION 3.1. *Les fonctions $Sn\,u$, $Cn\,u$, $Dn\,u$ et $En\,u$, sont reliées aux fonctions de Jacobi $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ par les formules*

$$\begin{aligned}
Sn(u; a, b, c) &= \frac{sn(u; b', c')}{(1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2}}, \\
Cn(u; a, b, c) &= \frac{1}{(1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2}}, \\
Dn(u; a, b, c) &= \frac{cn(u; b', c')}{(1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2}}, \\
En(u; a, b, c) &= \frac{dn(u; b', c')}{(1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2}},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\text{où } b' = (b^2 - a^2)^{1/2},\ c' = (c^2 - a^2)^{1/2}.$$

Démonstration. En opérant dans l'intégrale (3.8) le changement de variable $t = x^2$, on se ramène à l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^{y^2} \frac{1}{2}\,[t(1+a^2t)(1+b^2t)(1+c^2t)]^{-1/2}\,dt, \tag{3.10}$$

puis, avec $v = (t/(1+a^2t))^{1/2}$, il vient

$$u = \int_0^{y/(1+a^2y^2)^{1/2}} [(1+(b^2-a^2)v^2)(1+(c^2-a^2)v^2)]^{-1/2}\,dv.$$

D'où, d'après (1.9), en posant $b' = (b^2 - a^2)^{1/2}$ et $c' = (c^2 - a^2)^{1/2}$,

$$y/(1+a^2y^2)^{1/2} = sn(u; b', c'),$$

ce qui mène à la première formule de (3.9), les autres s'en déduisant à l'aide des relations quadratiques (3.3). ∎

Remarques. La fonction génératrice des polynomes de Schett s'écrit simplement à l'aide de ces quatre fonctions. D'après (2.6),

$$X(u; x, y, z) = yz\, Sn(u; x, y, z)\, Cn(u; x, y, z) + x\, Dn(u; x, y, z)\, En(u; x, y, z). \tag{3.11}$$

D'autre part, l'intégrale de Legendre de première espèce

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

s'écrit à l'aide de Cn,

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} Cn(u; k, (k^2 - 1)^{1/2}, k)\, du. \tag{3.12}$$

Dans le paragraphe 8, nous interpréterons combinatoirement le développement de Taylor de $F(\varphi, k)$ à l'aide de cette formule.

Considérons à présent la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass, qui, rappelons-le, se définit en inversant l'intégrale elliptique

$$u = \int_{\wp}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = \int_{\wp}^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)}}, \qquad \text{où } e_1 + e_2 + e_3 = 0. \tag{3.13}$$

PROPOSITION 3.2. *Soit $\wp(u)$ la fonction de Weierstrass associée aux trois racines de somme nulle e_1, e_2, e_3 suivantes: $e_1 = (a^2 + b^2 + c^2)/3 - a^2$, $e_2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3 - b^2$ et $e_3 = (a^2 + b^2 + c^2)/3 - c^2$. Elle est reliée à la fonction $Sn(u; a, b, c)$ par la formule*

$$\wp(u) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{1}{Sn^2 u}. \tag{3.14}$$

Démonstration. On passe de l'intégrale (3.8) à l'intégrale (3.13) par le changement de variable $t = (a^2 + b^2 + c^2)/3 + 1/x^2$, d'où le résultat. ∎

Notons que ces intégrales jouent un certain rôle dans la Théorie de la Chaleur de Lamé. On démontre que les surfaces équipotentielles autour d'un ellipsoïde chargé sont les ellipsoïdes homofocales dépendant d'un paramètre λ, et que le potentiel V est donné par l'intégrale (voir à ce sujet [5, pp. 304–308; 18, p. 55; 21, pp. 95–97]).

$$V(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{dT}{2[(T + a^2)(T + b^2)(T + c^2)]^{1/2}}.$$

4. Les polynomes de Schett symétriques

Nous appelons *polynomes de Schett symétriques* à trois variables la suite $S_n(x, y, z)$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} &S_1(x, y, z) = 2xyz, \\ &S_n = yz \frac{\partial}{\partial x} S_{n-1} + zx \frac{\partial}{\partial y} S_{n-1} + xy \frac{\partial}{\partial z} S_{n-1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

et notons $S(u; x, y, z)$ leur fonction génératrice. Les premiers termes sont

$$\begin{aligned} S(u; x, y, z) = {} & (2xyz)u \\ & + \begin{pmatrix} 2y^2z^2 + 2x^2y^2 \\ + 2x^2z^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} 8xy^3z \\ +8xyz^3 + 8x^3yz \end{pmatrix} \frac{u^3}{3!} \\ & + \begin{pmatrix} 8y^4z^4 + 8x^2y^4 \\ +8y^2z^4 + 72x^2y^2z^2 + 8x^4y^2 \\ + 8x^2z^4 + 8x^4z^2 \end{pmatrix} \frac{x^4}{4!} + \cdots . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Proposition 4.1. *La fonction $S(u; x, y, z)$ est donnée par les formules*

$$S(u; x, y, z) = [X(u; x, y, z)]^2 - x^2 = [Y(u)]^2 - y^2 = [Z(u)]^2 - z^2, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} S(u; x, y, z) = {} & 2xyz\, Sn\, u\, Cn\, u\, Dn\, u\, En\, u \\ & + (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\, Sn^2u + 2x^2y^2z^2\, Sn^4u, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $Sn\, u$, $Cn\, u \cdots$ abrègent $Sn(u; x, y, z)$, $Cn(u; x, y, z) \cdots$.

Les fonctions elliptiques sn^2u et Sn^2u ont d'autre part pour développements

$$sn^2(u; a, b) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{a^2b^2} S_n(0, a, b) \frac{u^n}{n!}, \tag{4.5}$$

$$Sn^2(u; a, b, c) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{abc} S_{2n-1}(a, b, c) \frac{u^{2n}}{(2n)!}. \tag{4.6}$$

Démonstration. La formule (4.3) se vérifie en constatant que les valeurs des fonctions et de leurs dérivées successives sont bien égales en $u = 0$. Notons que la fonction $S(u; x, y, z)$ apparaît implicitement en (2.7) et (2.8), et est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dS}{du} = 2[(x^2 + S)(y^2 + S)(z^2 + S)]^{1/2}, \qquad S(0) = 0. \tag{4.7}$$

Plus généralement,

$$\frac{d^n S(u)}{du^n} = S_n[X(u), Y(u), Z(u)]. \tag{4.8}$$

Par suite, d'après (2.14), on montre (4.5)

$$S(u; 0, a, b) = [X(u; 0, a, b)]^2 = a^2 b^2 sn^2(u; a, b). \tag{4.9}$$

En élevant au carré la formule (3.11), on obtient (4.4). Dans cette dernière identité la partie impaire en u est égale à

$$xyz \frac{d}{du} Sn^2(u; x, y, z), \qquad \text{d'où le développement (4.6).} \quad \blacksquare$$

Ainsi, les polynomes de Schett ordinaires nous permettaient d'exprimer, et de calculer rapidement, les développements de $sn\,u$ et de $cn\,u$. Les polynomes de Schett symétriques nous permettent de le faire pour $sn^2 u$ et $Sn^2 u$. Pour obtenir un résultat analogue quant aux développements de $Sn\,u$ et de $Cn\,u$, nous sommes amenés à introduire des polynomes de Schett (ordinaires) à quatre variables.

5. Les polynomes de Schett a quatre variables

Nous définissons les polynomes $\bar{X}_n(x, y, z, t)$ par la récurrence

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= x, \\ \bar{X}_n &= yzt \frac{\partial}{\partial x} \bar{X}_{n-1} + ztx \frac{\partial}{\partial y} \bar{X}_{n-1} + txy \frac{\partial}{\partial z} \bar{X}_{n-1} + xyz \frac{\partial}{\partial t} \bar{X}_{n-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

et leur fonction génératrice $\bar{X}(u; x, y, z, t)$, dont les premiers termes sont (les monômes de chaque polynome $\bar{X}_n$ sont ici disposés sur des octaèdres)

$$\begin{aligned} \bar{X}(u;x,y,z,t) = {} & x + (yzt)\,u + (xy^2z^2 + xy^2t^2 + xz^2t^2)\frac{u^2}{2!} \\ & + (4x^2y^3zt + 4x^2yz^3t + 4x^2yzt^3 + y^3z^3t + y^3zt^3 + yz^3t^3)\frac{u^3}{3!} \\ & + (4x^3y^4z^2 + 4x^3y^4t^2 + 4x^3y^2z^4 + 36x^3y^2z^2t^2 + 4x^3y^2t^4 + 4x^3z^4t^2 + 4x^3z^2t^4 \\ & \quad + xy^4z^4 + 14xy^4z^2t^2 + xy^4t^4 + 14xy^2z^4t^2 + 14xy^2z^2t^4 + xz^4t^4)\frac{u^4}{4!} + \cdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour calculer cette fonction génératrice, nous considérons le système

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{X}(u)}{du} &= \bar{Y}(u)\,\bar{Z}(u)\,\bar{T}(u), \qquad \bar{X}(0) = x,\\ \frac{d\bar{Y}(u)}{du} &= \bar{Z}(u)\,\bar{T}(u)\,\bar{X}(u), \qquad \bar{Y}(0) = y,\\ \frac{d\bar{Z}(u)}{du} &= \bar{T}(u)\,\bar{X}(u)\,\bar{Y}(u), \qquad \bar{Z}(0) = z,\\ \frac{d\bar{T}(u)}{du} &= \bar{X}(x)\,\bar{Y}(u)\,\bar{Z}(u), \qquad \bar{T}(0) = t.\end{aligned} \tag{5.3}$$

La fonction $\bar{X}(u; x, y, z)$, solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\bar{X}}{du} = [(\bar{X}^2 + y^2 - x^2)(\bar{X}^2 + z^2 - x^2)(\bar{X}^2 + t^2 - x^2)]^{1/2}, \qquad \bar{X}(0) = x, \tag{5.4}$$

s'obtient en inversant l'intégrale

$$u = \int_x^{\bar{X}} [(v^2 + y^2 - x^2)(v^2 + z^2 - x^2)(v^2 + t^2 - x^2)]^{-1/2}\, dv. \tag{5.5}$$

Posons $y' = (y^2 - x^2)^{1/2}$, et de même z' et t', et $w = v/y'z't'$.

$$u = \int_{x/y'z't'}^{\bar{X}/y'z't'} [(1 + z'^2t'^2w^2)(1 + t'^2y'^2w^2)(1 + y'^2z'^2w^2)]^{-1/2}\, dw.$$

D'après (3.8) on déduit

$$\bar{X}(u; x, y, z, t) = y'z't'\, Sn(u + \operatorname{Arg} Sn(x/y'z't'); z't', t'y', y'z'). \tag{5.6}$$

De la relation quadratique entre $\bar{Y}(u)$ et $\bar{X}(u)$,

$$\bar{Y}(u; x, y, z, t) = y'\, Cn(u + \operatorname{Arg} Sn(x/y'z't'); z't', t'y', y'z').$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\bar{X}(u; 0, y, z, t) &= yzt\, Sn(u; zt, ty, yz),\\ \bar{Y}(u; 0, y, z, t) &= y\, Cn(u; zt, ty, yz),\end{aligned} \tag{5.7}$$

ce qui permet d'énoncer la

PROPOSITION 5.1. *Les développements de $Sn\,u$ et $Cn\,u$ sont donnés par*

$$\begin{aligned} Sn(u; a, b, c) &= \sum_{n\geqslant 0} \bar{X}_n \left(0, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \frac{(abc\,u)^n}{n!}, \\ Cn(u; a, b, c) &= \sum_{n\geqslant 0} a\bar{X}_n \left(\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \frac{(abc\,u)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Démonstration. En opérant dans l'intégrale (3.8) le changement de variable $t = v/abc$, on obtient l'identité

$$Sn(u; a, b, c) = (1/abc)\, Sn(abc\,u; 1/bc, 1/ca, 1/ab).$$

De même

$$Cn(u; a, b, c) = Cn(abc\,u; 1/bc, 1/ca, 1/ab).$$

En appliquant (5.7), on déduit (5.8). ∎

Nous allons voir d'autre part que parmi les coefficients du polynome à quatre variables $\bar{X}_n$ figurent non seulement ceux du polynome de Schett ordinaire à trois variables X_n, mais aussi ceux du polynome de Schett symétrique S_n (divisés par deux).

PROPOSITION 5.2. *Dans le polynome de Schett à quatre variables $\bar{X}_n(x, y, z, t)$, le terme de plus haut degré en t est égal à $t^n X_n(x, y, z)$, X_n désignant le polynome de Schett ordinaire; en outre, le terme de plus haut degré en x est égal à $\frac{1}{2}x^{n-1}S_n(y, z, t)$, S_n désignant le polynome de Schett symétrique.*

Démonstration. Par induction sur n. On a bien, pour $n = 1$, $\bar{X}_1(x, y, z, t) = yzt = tX_1(x, y, z) = \frac{1}{2}S_1(y, z, t)$. Dans $\bar{X}_n$, le terme de plus haut degré en t est à rechercher dans

$$yzt \frac{\partial}{\partial x} \bar{X}_{n-1} + ztx \frac{\partial}{\partial y} \bar{X}_{n-1} + txy \frac{\partial}{\partial z} \bar{X}_{n-1}.$$

Plus précisément, c'est, par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &yzt \frac{\partial}{\partial x} (t^{n-1}X_{n-1}) + ztx \frac{\partial}{\partial y} (t^{n-1}X_{n-1}) + txy \frac{\partial}{\partial z} (t^{n-1}X_{n-1}) \\ &\quad = t^n \left[yz \frac{\partial}{\partial x} X_{n-1} + zx \frac{\partial}{\partial y} X_{n-1} + xy \frac{\partial}{\partial z} X_{n-1} \right] = t^n X_n. \end{aligned}$$

La démonstration est analogue pour le terme de plus haut degré en x. ∎

Nous allons à présent continuer le calcul de la fonction génératrice $\bar{X}(u; x, y, z, t)$ à partir de l'identité (5.6). A défaut d'une formule d'addition sur la fonction Sn, nous aurons recours à l'expression (3.14) de cette fonction à l'aide de la fonction de Weierstrass $\mathfrak{p}$, qui a l'avantage sur (3.9) de respecter la symétrie en a, b, c.

Dans le cas qui nous intéresse, la relation (3.14) s'écrit

$$\mathfrak{p}(u) = \tfrac{1}{3}(y'^2z'^2 + z'^2t'^2 + t'^2y'^2) + 1/Sn^2(u; y'z', z't', t'y'). \qquad (5.9)$$

L'espression de $[\bar{X}(u)]^2$ en fonction de $\mathfrak{p}$ est donc

$$\frac{y'^2z'^2t'^2}{[\bar{X}(u)]^2} = \mathfrak{p}(u+v) - \tfrac{1}{3}(y'^2z'^2 + z'^2t'^2 + t'^2y'^2),$$

$$\text{où } v = \operatorname{Arg} Sn(x/y'z't'). \qquad (5.10)$$

Par ailleurs la formule d'addition classique sur $\mathfrak{p}$ est [17, p. 860; 18, p. 21]

$$\mathfrak{p}(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(v)}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)}\right)^2 - (\mathfrak{p}(u) + \mathfrak{p}(v)).$$

La fonction $\mathfrak{p}$ ayant un pôle en 0, nous supposerons dans la suite du calcul que $x \neq 0$. Pour $x = 0$, l'expression de $\bar{X}(u)$ est donnée en (5.7). D'après (5.9) on a

$$\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = (x^2 - y'^2z'^2t'^2\, Sn^2u)/x^2\, Sn^2u. \qquad (5.11)$$

En outre,

$$\mathfrak{p}'(u) = -2\, Cn\, u\, Dn\, u\, En\, u/Sn^3u.$$

Or $Cn\, v = (1 + z'^2t'^2\, Sn^2v)^{1/2} = (1 + x^2/y'^2)^{1/2} = y/y'$, d'où

$$\mathfrak{p}'(v) = -2yzty'^2z'^2t'^2/x^3.$$

$$\frac{\mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(v)}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)} = \frac{2yzty'^2z'^2t'^2\, Sn^3u - 2x^3\, Cn\, u\, Dn\, u\, En\, u}{x\, Sn\, u(x^2 - y'^2z'^2t'^2\, Sn^2u)}, \qquad (5.12)$$

$$\mathfrak{p}(u) + \mathfrak{p}(v) = \frac{2}{3}(y'^2z'^2 + z'^2t'^2 + t'^2y'^2) + \frac{x^2 + y'^2z'^2t'^2\, Sn^2u}{x^2\, Sn^2u}.$$

Pour la suite du calcul notons simplement S, C, D, E les termes $Sn\, u$, $Cn\, u$, $Dn\, u$ et $En\, u$. Remarquons aussi que

$$y^2z^2t^2 = (y'^2 + x^2)(z'^2 + x^2)(t'^2 + x^2) = p_3 + x^2p_2 + x^4p_1 + x^6,$$

p_1, p_2, p_3 désignant les fonctions symétriques élémentaires de y'^2, z'^2, t'^2. En élevant au carré la formule (5.12), on obtient

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2$$
$$=\frac{(p_3+x^2p_2+x^4p_1+x^6)p_3^2S^6-2x^3yztp_3S^3CDE+x^6C^2D^2E^2}{x^2S^2(x^2-p_3S^2)^2}.$$

En outre, $C^2=1+z'^2t'^2S^2$, et de même pour D^2 et E^2. Nous sommes maintenant en mesure de réécrire l'identité (5.10) en remplaçant $\wp(u+v)$ par sa valeur.

$$\begin{aligned}\frac{p_3}{\bar{X}^2(u)}=\frac{1}{x^2S^2(x^2-p_3S^2)^2}&[(p_3^3S^6+x^2p_2p_3^2S^6+x^4p_1p_3^2S^6+x^6p_3^2S^6\\&-2x^3yztp_3S^3CDE+x^6+x^6p_2S^2+x^6p_3p_1S^4+x^6p_3^2S^6)\\&-(x^2+p_3S^2)(x^4-2x^2p_3S^2+p_3^2S^4)\\&-p_2x^2S^2(x^4-2x^2p_3S^2+p_3^2S^4)].\end{aligned}$$

Après simplifications,

$$\begin{aligned}\frac{p_3}{\bar{X}^2(u)}=\frac{x^2p_3S^2}{x^2S^2(x^2-p_3S^2)^2}&(x^2p_1p_3S^4+2x^4p_3S^4-2xyzt\,SCDE\\&+x^4p_1S^2+x^2+p_3S^2+2x^2p_2S^2).\end{aligned}$$

PROPOSITION 5.3. *La fonction génératrice des polynomes de Schett à quatre variables s'exprime à l'aide des fonctions Sn, Cn, Dn et En par la formule suivante quand* $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{X}(u;x,y,z,t)=(x^2-p_3S^2)[&x^2+(p_3+2x^2p_2+x^4p_1)S^2\\&+(x^2p_1p_3+2x^4p_3)S^4-2xyztSCDE]^{-1/2},\quad(5.13)\end{aligned}$$

où $p_1=y'^2+z'^2+t'^2$, $p_2=y'^2z'^2+z'^2t'^2+t'^2y'^2$, $p_3=y'^2z'^2t'^2$, *la lettre* S *abrégeant* $Sn(u;y'z',z't',t'y')$ *et de même* C, D, E. *En outre*

$$\bar{X}(u;0,y,z,t)=yzt\,Sn(u;yz,zt,ty).$$

6. Pics de cycle. Interpretation des polynomes de Schett a trois variables (preuve directe)

Le contenu de ce paragraphe est la traduction en français de [10]. Rappelons que les polynomes de Schett à trois variables initialisés en x sont définis par la relation de récurrence.

$$X_0 = x,$$
$$X_n = yz\frac{\partial}{\partial x}X_{n-1} + zx\frac{\partial}{\partial y}X_{n-1} + xy\frac{\partial}{\partial z}X_{n-1}. \tag{2.1}$$

Le polynome X_n est homogène de degré $(n+1)$. Quand n est pair (resp. impair), X_n est pair (resp. impair) en y et en z, mais impair (resp. pair) en x. Nous définirons donc les coefficients $a_{n,i,j}$ *du* polynome X_n comme suit

$$X_n(x, y, z) = \sum_{i,j} a_{n,i,j} x^{2i+1} y^{2j} z^{n-2i-2j} \qquad (n \text{ pair}; 0 \leqslant 2i + 2j \leqslant n),$$
$$X_n(x, y, z) = \sum_{i,j} a_{n,i,j} x^{2i} y^{2j+1} z^{n-2i-2j} \qquad (n \text{ impair}; 0 \leqslant 2i + 2j \leqslant n-1). \tag{6.1}$$

La relation (2.1) se traduit sur les coefficients par la récurrence

$$a_{0,0,0} = 1; \text{ si } i \neq 0 \text{ ou } j \neq 0,\ a_{0,i,j} = 0;$$
$$a_{n,i,j} = (2j+1)a_{n-1,i,j} + (2i+2)a_{n-1,i+1,j-1} + (n-2i-2j+1)a_{n-1,i,j-1} \quad (n \text{ pair}),$$
$$a_{n,i,j} = (2i+1)a_{n-1,i,j} + (2j+2)a_{n-1,i-1,j+1} + (n-2i-2j+1)a_{n-1,i-1,j} \quad (n \text{ impair}) \tag{6.2}$$

Le caractère linéaire de cette récurrence permet à Schett de calculer rapidement les coefficients [26]. Nous allons en donner une interprétation combinatoire en termes de pics de cycle sur les permutations, notion remontant à André [4].

Definition 6.1. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un entier p $(1 < p \leqslant n)$ est dit *pic de cycle* si les deux inégalités strictes suivantes sont vérifiées:

$$\sigma^{-1}(p) < p > \sigma(p).$$

Exemple. La permutation $\sigma = (134)(6)(25)$, décomposée ici en cycles (c'est-à-dire $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(6) = 6$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(5) = 2$), possède deux pics de cycle, les entiers 4 et 5.

En distinguant les pics de cycle suivant leurs parités en tant qu'entiers, nous obtenons le résultat suivant.

THEOREME 6.2. *L'entier $a_{n,i,j}$ est égal au nombre de permutations de $\{1, 2,..., n\}$ ayant i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs.*

EXEMPLE. Il existe $a_{6,1,1} = 328$ permutations de $\{1, 2,..., 6\}$ qui possèdent, comme dans l'exemple utilisé plus haut, un pic de cycle impair et un pic de cycle pair.

Démonstration. Notons $[n]$ l'ensemble $\{1, 2,..., n\}$. Nous montrerons que le nombre de permutations de $[n]$ ayant i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs satisfait (6.2) dans le cas où n est pair, la démonstration pour n impair étant analogue.

A toute permutation σ de $[n]$ nous faisons correspondre une permutation τ de $[n-1]$ en enlevant n de son cycle. Autrement dit, si $\sigma(n) = n$, la permutation τ est simplement la restriction de σ à $[n-1]$. Sinon, $\sigma(n) < n$, nous posons $\tau(\sigma^{-1}(n)) = \sigma(n)$ et, pour tout $i \neq \sigma^{-1}(n)$, $\tau(i) = \sigma(i)$.

Réciproquement, toute permutation τ de $[n-1]$ peut être prolongée en une permutation σ de $[n]$, de n manières distinctes, en choisissant un entier k dans $[n]$, en posant, si $k = n$, $\sigma(n) = n$, et si $k < n$, $\sigma(k) = n$ et $\sigma(n) = \tau(k)$. Nous dirons que n a été inséré dans le cycle de k, à la droite de k (à la gauche serait: $\sigma(\tau^{-1}(k)) = n$, $\sigma(n) = k$). Pour tous les autres éléments i de $[n]$, on pose $\sigma(i) = \tau(i)$.

Voyons comment évoluent le nombre de pics de cycle pairs et le nombre de pics de cycle impairs lorsque nous prolongeons τ en σ.

(a) Examinons d'abord le cas où l'insertion de n laisse ces deux nombres invariants. Nous partons donc de τ ayant i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs. L'entier n étant pair, il faut, pour ne pas augmenter la valeur de j, insérer n à droite ou à gauche d'un pic pair de τ, ou alors poser $\sigma(n) = n$, d'où $(2j + 1)$ prolongements distincts.

(b) Si au contraire nous voulons remplacer un pic de cycle impair de τ par le pic de cycle pair n, nous devons partir d'une permutation τ ayant $(i + 1)$ pics de cycle impairs et $(j - 1)$ pics de cycle pairs, insérer n à droite ou à gauche d'un pic de cycle impair de τ, ce qui représente $(2i + 2)$ possibilités, et σ aura i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs.

(c) Si enfin nous voulons seulement créer un nouveau pic de cycle pair en insérant n, nous devons partir d'une permutation τ ayant i pics de cycle impairs et $(j - 1)$ pics de cycle pairs, exclure les $(2(j-1) + 1)$ insertions de type (a) et les $2i$ insertions de type (b). Il reste $(n - 2i - 2j + 1)$ insertions possibles, aboutissant à une permutation σ ayant i pics de cycle impairs et j pics de cycle pairs.

En rassemblant les tois cas, nous obtenons la relation de récurrence (6.2). ∎

Remarque. En utilisant la *transformation fondamentale* $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ sur les permutations (pour plus de détails, nous renvoyons à [14]) on peut traduire le Théorème 6.2 en un second énoncé équivalent. Nous dirons d'un point $(k, \hat{\sigma}(k))$ du graphe d'une permutation $\hat{\sigma}$ de $[n]$ qu'il est un *pic-à-gauche* si $k = 1$ et $\hat{\sigma}(1) > \hat{\sigma}(2)$, ou s'il satisfait (P):

$$\text{(P)} \qquad 2 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } \hat{\sigma}(k-1) < \hat{\sigma}(k) > \hat{\sigma}(k+1).$$

Les pics-de-cycle d'une permutation σ s'envoient bijectivement sur les pics-à-gauche de son image $\hat{\sigma}$ par la transformation fondamentale. Dans l'exemple ci-dessus, on a $\hat{\sigma} = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{4\,3\,1\,5\,2\,6}$; $\hat{\sigma}$ a deux pics-à-gauche: $(1, 4)$ et $(4, 5)$. Le second énoncé de (6.2) s'obtient donc en remplaçant "pics de cycle impairs (resp. pairs)" par *pics-à-gauche de valeurs impaires* (*resp. paires*). Les pics-à-gauche ont le défaut d'introduire une dissymétrie gauche-droite, et pour cette raison nous leur préférerons les pics de cycle.

Venons-en aux conséquences du théorème. D'après (2.13), on a

$$\begin{aligned} sn(u; a, b) &= \sum_n \sum_j a_{n,0,j} a^{2j} b^{n-1-2j} \frac{u^n}{n!} \qquad (n \text{ impair}; 0 \leqslant 2j \leqslant n-1), \\ cn(u; a, b) &= \sum_n \sum_i a_{n,i,0} a^{n-2i} b^{2i} \frac{u^n}{n!} \qquad (n \text{ pair}; 0 \leqslant 2i \leqslant n). \end{aligned} \tag{6.3}$$

COROLLAIRE 6.3. *Soit n un entier impair. Le coefficient de $a^{2j} b^{n-1-2j} u^n/n!$ dans le développement de $sn(u; a, b)$ est égal au nombre de permutations de $[n]$ (ou de $[n-1]$) ayant j pics de cycle tous pairs.*

COROLLAIRE 6.4. *Soit n un entier pair. Le coefficient de $a^{n-2i} b^{2i} u^n/n!$ dans le développement de $cn(u; a, b)$ est égal au nombre de permutations de $[n]$ (ou de $[n-1]$) ayant i pics de cycle tous impairs, et aussi au nombre de permutations de $[n]$ ayant $n/2$ pics de cycle, i étant impairs.*

COROLLAIRE 6.5. *Le nombre d'Euler E_n, coefficient de $u^n/n!$ dans le développement de la fonction $tgu + 1/\cos u$, est égal au nombre de permutations de $[n]$ (ou de $[n-1]$) qui n'ont aucun pic de cycle de la parité de n.*

COROLLAIRE 6.6. *Soit n un entier pair. Le coefficient de $a^{n-2i} b^{2i} u^n/n!$ dans le développement de $cn(u; a, b)$ est égal au nombre de permutations alternantes [3] sur $[n]$ commençant par une descente, ayant i pics-à-gauche de valeurs impaires et $(n/2 - i)$ de valeurs paires.*

Le Corollaire 6.6, qui est un raffinement du résultat classique de André [3] et que nous déduisons du Corollaire 6.4 par la transformation fondamentale, a été trouvé indépendamment par Flajolet [13].

7. Choix de pics de cycle. Interpretations de divers developpements (preuve indirecte du theoreme 6.2)

Commençons par définir quelques objets combinatoires qui visent à construire une permutation à partir de la donnée—nous dirons du choix—de certains de ses pics de cycle. Dans tout ce qui suit, nous ne supposons donc pas la permutation donnée au départ.

Faire le choix d'un pic de cycle, c'est choisir un triplet (q, p, r) d'entiers de $[n]$ tels que $q < p > r$, avec q et r non nécessairement distincts; autrement dit, c'est choisir non seulement le futur pic de cycle p, mais encore les entiers q et r qui sont destinés à être l'antécédent et l'image de p par une permutation.

Faire le choix de k pics de cycle, c'est choisir un ensemble (non ordonné) de k triplets (q_1, p_1, r_1), (q_2, p_2, r_2),..., (q_k, p_k, r_k), tels que pour tout i on ait les inégalités $q_i < p_i > r_i$, les p_i et les q_i formant un ensemble de $2k$ entiers distincts, les p_i et les r_i formant aussi un ensemble de $2k$ entiers distincts. Comme les q_i ne sont pas nécessairement distincts des r_j, nous sommes conduits à définir la notion de *chaîne de pics de cycle*.

Une suite ordonnée de l pics de cycle (q_1, p_1, r_1),..., (q_l, p_l, r_l), forme une *chaîne* si $r_1 = q_2$, $r_2 = q_3$,..., $r_{l-1} = q_l$. Si de plus $r_l = q_1$, on dit que c'est une *chaîne fermée de longueur* $2l$. Sinon, c'est une *chaîne ouverte de longueur* $(2l+1)$, dont q_1 est le *début* et r_l la *fin*. Un pic de cycle (q, p, r) qui n'est enchaîné à aucun autre pic de cycle, ni par son image, ni par son antécédent, forme à lui seul une chaîne, fermée et de longueur 2 si $q = r$, ouverte et de longueur 3 si $q \neq r$.

Ainsi tout choix de k pics de cycle se partitionne en chaînes, ouvertes ou fermées. Les *points restants* de $[n]$, c'est-à-dire les éléments de $[n]$ qui n'appartiennent pas à $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} \{q_i, p_i, r_i\}$, seront par convention considérés comme formant chacun séparément une *chaîne ouverte de longueur* 1, dont l'unique élément est à la fois le début et la fin. On obtient ainsi une partition de $[n]$ tout entier en chaînes. Remarquons que le nombre de chaînes ouvertes de cette partition est égal à $(n - 2k)$. En effet, parmi les k pics de cycle, un certain nombre, soit φ, se trouvent dans les chaînes fermées qui contiennent donc en tout 2φ éléments. Les $(k - \varphi)$ autres pics de cycle se trouvent dans des chaînes ouvertes. Si ψ est le nombre de ces chaînes ouvertes de longueurs supérieures ou égales à 3, elles contiennent en tout $(2(k - \varphi) + \psi)$ éléments. Les points restants sont donc au nombre de $n - 2\varphi - (2(k - \varphi) + \psi) = n - 2k - \psi$, ce qui fait bien au total $n - 2k$ chaînes ouvertes.

Réciproquement, à une partition de $[n]$ en chaînes correspond bien, de façon biunivoque, un choix de pics de cycle.

EXEMPLE 7.1. Au choix de 4 pics de cycle suivant, dans $\{1, 2, ..., 12\}$: $(3, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$, $(4, 10, 4)$, $(9, 12, 6)$, correspond la partition de $[12]$ suivante, en 4 chaînes ouvertes: $(1, 7, 3, 5, 2)$, $(9, 12, 6)$, (8), (11), et une chaîne fermée: $(4, 10)$.

A l'aide de ces notions, nous allons d'abord interpréter le développement de la fonction $cn(u; a, b) \cdot \exp(sn(u; a,, b))$.

Remarquons que dans le développement de $sn^k u/k!$, il y a, au sein de chaque terme, une différence égale à k entre le degré en u et le degré total en a et b, c'est pourquoi nous posons

$$cn\, u \cdot sn^k u/k! = \sum_n \sum_{i,j} \alpha_{n,i,j} a^{2i} b^{2j} u^n/n! \qquad (n \geqslant k; 2i + 2j = n - k). \tag{7.1}$$

Les deux ensembles d'indices $\{(k, n); n \geqslant k,\ k \geqslant 0\}$ et $\{(k, n); 0 \leqslant n - k \leqslant n\}$ étant identiques, nous déduisons

$$cn\, u \cdot \exp(sn\, u) = \sum_n \sum_{i,j} \alpha_{n,i,j} a^{2i} b^{2j} u^n/n! \qquad (n \geqslant 0; 0 \leqslant 2i + 2j \leqslant n). \tag{7.2}$$

PROPOSITION 7.2. *Les coefficients $\alpha_{n,i,j}$ sont entiers et s'obtiennent par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{aligned} &\alpha_{0,0,0} = 1; \text{ si } i \neq 0 \text{ ou } j \neq 0,\ \alpha_{0,i,j} = 0, \\ &\alpha_{n,i,j} = \alpha_{n-1,j,i} + (n - 2i - 2j + 1)^2 \alpha_{n-1,j,i-1}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Démonstration. En effet, d'après (1.1) et (1.7), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}[cn\, u \cdot \exp(sn\, u)] &= (a^2\, sn\, u\, dn\, u + cn^2 u\, dn\, u) \exp(sn\, u) \\ &= (1 + a^2 sn\, u + a^2\, sn^2 u)\, dn\, u \cdot \exp(sn\, u) \\ &= dn\, u \cdot \sum_{k \geqslant 0} (1 + ka^2 + k(k-1)a^2)\, sn^k u/k!, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{du}[cn\, u \cdot \exp(sn\, u)] = dn\, u \cdot \exp(sn\, u) + a^2 \sum_{k \geqslant 0} k^2 \cdot sn^k u \cdot dn\, u/k!.$$

Cherchons, à gauche et à droite de cette identité, le coefficient de $a^{2i} b^{2j} u^{n-1}/(n-1)!$ A gauche, c'est $\alpha_{n,i,j}$. A droite c'est d'abord $\alpha_{n-1,j,i}$, d'après (1.3). Puis c'est la contribution du terme en $a^{2i-2} b^{2j} u^{n-1}/(n-1)!$ dans le développement de $dn\, u \cdot sn^k u/k!$, pour un certain k. D'après (7.1), k doit être tel que $(2i - 2) + 2j = n - 1 - k$. D'où $k = n - 2i - 2j + 1$. ∎

Le début du développement est le suivant

$$cn\, u \exp(sn\, u) = 1 + u + \begin{pmatrix} 1 \\ +a^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} 1 \\ +4a^2 + b^2 \end{pmatrix} \frac{u^3}{3!}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ +10a^2 + 4\ \ b^2 \\ +\ \ a^4 + 4a^2b^2 \end{pmatrix} \frac{u^4}{4!}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ +20a^2 + 10\ \ b^2 \\ +16a^4 + 44a^2b^2 + b^4 \end{pmatrix} \frac{u^5}{5!}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ +35a^2 + \ \ 20\ \ b^2 \\ +91a^4 + 224a^2b^2 + 16\ \ b^4 \\ +\ \ a^6 + \ \ 44a^4b^2 + 16a^2b^4 \end{pmatrix} \frac{u^6}{6!} + \cdots . \tag{7.4}$$

Remarque 7.3. Les coefficients qui apparaissent sur les premières colonnes (et sur les diagonales), coefficients dont la fonction génératrice s'obtient donc en posant $b = 0$, ont été étudiés par divers auteurs [6, 7, 24, 28]. Ils sont analogues aux nombres dits "factoriels centraux" $T(m, j)$ définis par la récurrence (voir les mêmes références [6, 7, 24, 28])

$$T(1, 1) = 1; \qquad T(m, j) = j^2 T(m-1, j) + T(m-1, j-1).$$

En particulier, de (7.3) on déduit que $\alpha_{2m,0,j} = 2^{2j} T(m, j)$.

THEOREME 7.4. *L'entier $\alpha_{n,i,j}$ est égal au nombre de choix $C_{i,j}$ de $(i + j)$ pics de cycle dans $[n]$, parmi lesquels i pics de cycle sont de la parité de n, et j sont de l'autre parité.*

Démonstration. Distinguons suivant que n figure ou non parmi les pics de cycle choisis. S'il n'y figure pas, c'est qu'on a choisi dans $[n-1]$ un nombre j de pics de cycle qui sont de la parité de $(n-1)$, et un nombre i qui sont de l'autre parité, soit $\alpha_{n-1,j,i}$ choix par hypothèse de récurrence.

S'il y figure, c'est qu'on a d'abord choisi dans $[n-1]$ un nombre j de pics de cycle de la parité de $(n-1)$ et un nombre $(i-1)$ qui sont de la parité de n, soit $\alpha_{n-1,j,i-1}$ choix, puis on choisit le pic de cycle $(q, p = n, r)$. Pour cela, il faut prendre q dans l'ensemble $[n-1]$ diminué des $(i + j - 1)$ pics de cycle ainsi que de leurs antécédents, soit $(n-1) - 2(i + j - 1) = n - 2i - 2j + 1$ choix; il faut de même choisir r dans l'ensemble $[n-1]$ diminué des $(i + j - 1)$ pics de cycle ainsi que de leurs images, soit encore $(n - 2i - 2j + 1)$ choix, ce qui nous conduit à la relation de récurrence (7.3).

Ce théorème nous permet d'interpréter le développement de la fonction $cn(u; a, b)/1 - sn(u; a, b)$. En effet, d'après (7.1)

$$\frac{cn\,u}{1 - sn\,u} = \sum_{k \geqslant 0} cn\,u\,sn^k u = \sum_n \sum_{i,j} (n - 2i - 2j)!\,\alpha_{n,i,j} a^{2i} b^{2j} \frac{u^n}{n!}$$

$$(0 \leqslant 2i + 2j \leqslant n). \qquad (7.5)$$

Le début du développement est le suivant

$$\begin{aligned}\frac{cn(u; a, b)}{1 - sn(u; a, b)} &= 1 + u + \begin{pmatrix} 2 \\ +a^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} 6 \\ +4a^2 + b^2 \end{pmatrix} \frac{u^3}{3!} \\ &+ \begin{pmatrix} 24 \\ +20a^2 + 8\ b^2 \\ +\ a^4 + 4a^2b^2 \end{pmatrix} \frac{u^4}{4!} \\ &+ \begin{pmatrix} 120 \\ +120a^2 + 60\ b^2 \\ +\ 16a^4 + 44a^2b^2 + b^4 \end{pmatrix} \frac{u^5}{5!} \\ &+ \begin{pmatrix} 720 \\ +740a^2 + 480\ b^2 \\ +182a^2 + 448a^2b^2 + 32\ b^4 \\ +\ a^6 +\ 44a^4b^2 + 16a^2b^4 \end{pmatrix} \frac{u^6}{6!} + \cdots. \qquad (7.6)\end{aligned}$$

PROPOSITION 7.5. *L'entier $(n - 2i - 2j)!\,\alpha_{n,i,j}$ est égal au nombre de couples $(C_{i,j}, \sigma)$, où $C_{i,j}$ est un choix dans $[n]$ de i pics de cycle qui sont de la parité de n, et j qui sont de l'autre parité, et où σ est une permutation de $[n]$ possédant ces $(i + j)$ pics de cycle, et éventuellement d'autres.*

Démonstration. Le choix $C_{i,j}$ étant effectué, considérons la partition en chaînes qui lui est associée. Une permutation σ possédant les pics de cycle de $C_{i,j}$ est déjà déterminée en un certain nombre de points. Ainsi les chaînes fermées de la partition sont autant de cycles déjà constitués de la permutation σ. En fait, les seuls points f de $[n]$ pour lesquels $\sigma(f)$ reste à déterminer sont les fins de chaînes ouvertes, les seuls points d de $[n]$ pour lesquels $\sigma^{-1}(d)$ n'est pas connu sont les débuts de chaînes ouvertes. Or nous savons qu'il y a $(n - 2(i + j))$ chaînes ouvertes dans la partition, donc $(n - 2i - 2j)!$ manières d'envoyer par σ les fins sur les débuts, et de prolonger ainsi σ à $[n]$ entier. ∎

EXEMPLE 7.6. Revenons à l'exemple (7.1). Il existe $4! = 24$ manières d'envoyer par σ les fins de chaînes ouvertes $\{2, 6, 8, 11\}$ sur les débuts de chaînes ouvertes $\{1, 9, 8, 11\}$. Si par exemple $\sigma(2) = 11$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(8) = 9$,

$\sigma(11)=1$, la permutation σ est $(1, 7, 3, 5, 2, 11)$ $(9, 12, 6, 8)$ $(4, 10)$. Elle possède bien les pics de cycles 5, 7, 10, 12, de $C_{i,j}$, et un autre: 11.

Ce résultat va nous permettre de réintroduire d'une nouvelle manière les polynomes de Schett, en utilisant leur interprétation combinatoire du Théorème (6.2), au lieu de leur récurrence (2.1).

THEOREME 7.7. *Posons* $a'=(a^2-1)^{1/2}$ *et* $b'=(b^2-1)^{1/2}$. *La fonction* $A(u)=cn(u; a', b')/1-sn(u; a', b')$ *est, à un changement de variables près, fonction génératrice des polynomes de Schett. Plus précisément, son développement est*

$$A(u)=\sum_{n\text{ pair}\geqslant 0}\ \sum_{i,j} a_{n,j,i}a^{2i}b^{2j}\frac{u^n}{n!}$$
$$+\sum_{n\text{ impair}\geqslant 0}\ \sum_{i,j} a_{n,i,j}a^{2i}b^{2j}\frac{u^n}{n!}, \tag{7.7}$$

où $a_{n,i,j}$ *est le coefficient du polynome de Schett défini en* (6.1).

Démonstration. Revenons à l'ensemble des couples $(C_{i,j}, \sigma)$ définis dans la proposition précédente, ensemble que nous partitionnons suivant les paires ordonnées (k, l), où k (resp. l) désigne le nombre exact de pics de cycles de la parité de n (resp. de l'autre parité) que la permutation σ possède. Ainsi, on a les inégalités: $i\leqslant k\leqslant [n/2], j\leqslant l\leqslant [n/2]$.

Les entiers k et l étant fixés, le nombre de permutations σ en question est, d'après le Théorème 6.2, égal à $a_{n,k,l}$ si n est impair, à $a_{n,l,k}$ si n est pair. Le nombre de choix $C_{i,j}$ de pics de cycle tirés d'une permutation de ce type est égal à $\binom{k}{i}\binom{l}{j}$. En sommant sur tous les couples (k, l) possibles, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}
&(n-2i-2j)!\, a_{n,i,j}=\sum_{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}a_{n,k,l} \\
&\qquad\qquad (n \text{ impair};\ 2i\leqslant 2k\leqslant n,\ 2j\leqslant 2l\leqslant n). \\
&(n-2i-2j)!\, a_{n,i,j}=\sum_{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}a_{n,l,k} \\
&\qquad\qquad (n \text{ pair};\ 2i\leqslant 2k\leqslant n,\ 2j\leqslant 2l\leqslant n).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Traduite sur les polynomes générateurs, l'identité (7.8) donne (n impair):

$$\sum_{i,j}(n-2i-2j)!\, a_{n,i,j}a^{2i}b^{2j}=\sum_{i,j}a_{n,i,j}(a^2+1)^i(b^2+1)^j, \tag{7.9}$$

et de même pour n pair, $a_{n,j,i}$ remplaçant $a_{n,i,j}$. En remplaçant dans cette identité a^2 par (a^2-1) et b^2 par (b^2-1), et en utilisant (7.5), on obtient l'énoncé du théorème.

Notre démonstration repose en fait sur une "formule d'inclusion-exclusion généralisée," étendue ici à deux indices i et j. Pour un exposé élémentaire de ce principe sur les polynomes énumérateurs, à un indice, nous renvoyons à [23, p. 53–55] ou à [19, pp. 102–105]. ∎

Le début du développement $A(u)$ est le suivant (à comparer avec (2.3))

$$A(u)=\frac{cn(u;a',b')}{1-sn(u;a',b')}=1+u+\begin{pmatrix}1\\+a^2\end{pmatrix}\frac{u^2}{2!}+\begin{pmatrix}1\\+4a^2+b^2\end{pmatrix}\frac{u^3}{3!}$$
$$+\begin{pmatrix}1\\+14a^2+4\ \ b^2\\+\ \ a^4+4a^2b^2\end{pmatrix}\frac{u^4}{4!}$$
$$+\begin{pmatrix}1\\+44a^2+14\ \ b^2\\+16a^4+44a^2b^2+b^4\end{pmatrix}\frac{u^5}{5!}$$
$$+\begin{pmatrix}1\\+135a^2+\ \ 44\ \ b^2\\+135a^4+328a^2b^2+16\ \ b^4\\+\ \ a^6+\ \ 44a^4b^2+16a^2b^4\end{pmatrix}\frac{u^6}{6!}+\cdots. \tag{7.10}$$

Puisque $A(u;a,b)$ et $X(u;x,y,z)$ sont deux fonctions génératrices des mêmes coefficients $a_{n,i,j}$, on peut passer de l'une à l'autre par changement de variables. Pour cela, commençons par redresser la partie paire de $A(u)$, qui engendre $a_{n,j,i}$ et non $a_{n,i,j}$, en séparant d'abord partie paire et partie impaire:

$$A(u)=\frac{cn(u;a',b')}{1-sn^2(u;a',b')}+\frac{cn(u;a''b')\,sn(u;a''b')}{1-sn^2(u;a''b')},$$

puis permutant a' et b' dans la partie paire et appliquant (1.3),

$$\frac{dn(u;a''b')+cn(u;a'b')sn(u;a''b')}{1-sn^2(u;a''b')}=\sum_n\sum_{i,j}a_{n,i,j}a^{2i}b^{2j}\frac{u^n}{n!}. \tag{7.11}$$

Posons $a=x/z$, $b=y/z$, $u=zv$, d'où

$$dn(u;a',b')=dn(v;(x^2-z^2)^{1/2},(y^2-z^2)^{1/2}),$$
$$sn(u;a''b')=z\,sn(v;(x^2-z^2)^{1/2},(y^2-z^2)^{1/2}).$$

Multiplions la partie paire par x, la partie impaire par y, et nous obtenons exactement les polynomes de Schett donnés en (6.1) d'une part, leur fonction génératrice $X(v; x, y, z)$ déduite de (2.12) d'autre part:

$$
\begin{aligned}
X(v; x, y, z)& \\
&= \frac{x\, dn(v; (x^2 - z^2)^{1/2}, (y^2 - z^2)^{1/2}) + yz\, cn(v; \ldots, \ldots)\, sn(v; \ldots, \ldots)}{1 - z^2\, sn^2(v; (x^2 - z^2)^{1/2}, (y^2 - z^2)^{1/2})} \\
&= \sum_{n \text{ pair}} a_{n,i,j} x^{2i+1} y^{2j} z^{n-2i-2j} \frac{v^n}{n!} \\
&\quad + \sum_{n \text{ impair}} a_{n,i,j} x^{2i} y^{2j+1} z^{n-2i-2j} \frac{v^n}{n!} + \cdots \\
&= x + (yz)v + (xy^2 + xz^2)\frac{v^2}{2!} + (yz^3 + y^3 z + 4x^2 yz)\frac{v^3}{3!} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous avons redémontré la formule (2.12) à partir du Théorème 6.2, ou encore donné une preuve indirecte et plus "constructive" de ce théorème à partir de la formule (2.12) et du théorème (7.7).

8. Interpretation des developpements de la fonction $Cn\,u$ et de l'integrale de Legendre $F(\varphi, k)$

Le développement de $Cn\,u$ est le même, à une permutation près des lettres a, b, c, que celui des fonctions $Dn\,u$ et $En\,u$.

Nous allons donc en fait calculer le développement de $Dn\,u$ d'après son expression (3.9) à l'aide des fonctions de Jacobi, et d'abord considérer le développement de $cn(u; a, b)/(1 - sn^2(u; a, b))^{1/2}$.

On sait classiquement que

$$(1 - t^2)^{-1/2} = \sum_{k \geqslant 0} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1))^2 \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \tag{8.1}$$

Par suite, utilisant cette identité et l'identité (7.1),

$$cn\,u(1 - sn^2 u)^{-1/2} = \sum_{k \geqslant 0} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1))^2 cn\,u\, sn^{2k} u/(2k)!$$

$$cn\,u(1 - sn^2 u)^{-1/2} = \sum_{n} \sum_{i,j} (1 \cdot 3 \cdots (n - 2i - 2j - 1))^2 \alpha_{n,i,j} a^{2i} b^{2j} \frac{u^n}{n!}$$
$$(n \text{ pair};\ 0 \leqslant 2i + 2j \leqslant n) \tag{8.2}$$

Les premiers termes de (8.2) sont donc

$$\frac{cn(u;a,b)}{(1-sn^2(u;a,b))^{1/2}} = 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ +a^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{2!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 9 & & \\ +10a^2 + 4 & b^2 & \\ + \quad a^4 + 4a^2b^2 & & \end{pmatrix} \frac{u^4}{4!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 225 \\ +315a^2 + 180 \quad b^2 \\ + \ 91a^4 + 224a^2b^2 + 16 \quad b^4 \\ + \quad a^6 + \ 44a^4b^2 + 16a^2b^4 \end{pmatrix} \frac{u^6}{6!} + \cdots . \tag{8.3}$$

Les coefficients diagonaux sont ceux du développement de l'intégrale de Legendre de première espèce, ainsi qu'il apparaît dans la proposition suivante, simple réécriture d'un résultat dû à Gudermann [15, p. 71].

PROPOSITION 8.1. *L'intégrale de Legendre de première espèce* $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\theta/\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ *a pour développement*

$$F(\varphi,k) = \varphi + \sum_n \sum_j (-1)^j (1\cdot 3\cdot 5 \cdots (n-2j-1))^2 2^{2j} T\left(\frac{n}{2}, j\right)$$
$$\times k^{n-2j} \frac{\varphi^{n-1}}{(n+1)!} \qquad (n \text{ pair} \geqslant 2;\ 0 \leqslant 2j \leqslant n-2), \tag{8.4}$$

les nombres $T(n/2, j)$ *désignant les nombres factoriels centraux définis dans la Remarque* 7.3.

Démonstration. Posant $a=0$, $b=1/ik$, $u=k\theta$ dans le développement (8.2); on a

$$cn(k\theta; 0, 1/ik) = 1,$$
$$sn(k\theta; 0, 1/ik) = k \sin\theta,$$

d'où

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{-1/2}$$
$$= \sum_n \sum_j (1\cdot 3 \cdots (n-2j-1))^2 \alpha_{n,0,j} (-1)^j k^{n-2j} \theta^n/n! \qquad (n \text{ pair}).$$

D'où le résultat, en intégrant entre 0 et φ, et tenant compte de la Remarque 7.3.

Les premiers termes sont les suivants, ce qui concorde avec [15].

$$F(\varphi,k) = \varphi + k^2\frac{\varphi^3}{3!} + (9k^4 - 4k^2)\frac{\varphi^5}{5!} + (225k^6 - 180k^4 + 16k^2)\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots . \tag{8.5}$$

La fonction $u = F(\varphi, k)$ est la fonction inverse de l'amplitude $\varphi = \mathrm{Am}(u, k)$. Signalons que les développements des autres fonctions elliptiques inverses sont plus connus. On désigne souvent sous le nom de "coefficients de Legendre" ceux du développement de Arg $sn\,x$, on en trouvera le calcul dans [15, pp. 75–77] (Voir aussi [8, p. 175, Ex. 27] et une interprétation probabiliste dans [22, 27].)

Pour interpréter le développement de $Cn\,u$, nous aurons besoin d'un lemme classique de dénombrement [6].

LEMME 8.2. *Soit n un entier pair. Le nombre de permutations de $[n]$ en cycles tous de longueurs paires est égal à $[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)]^2$.*

Démonstration. Les permutations en cycles de longueurs paires sont par définition les composés partitionnels [14] des permutations circulaires de longueurs paires. Or on a

$$\begin{aligned}\exp(t^2/2 + t^4/4 + \cdots + t^{2k}/2k + \cdots)\\ = \exp(-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}(1-t^2)) = (1-t^2)^{-1/2}\\ = \sum_{n\ \text{pair}} (1 \cdot 3 \cdots (n-1))^2 \frac{t^n}{n!}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

On peut aussi se passer des fonctions génératrices pour montrer ce lemme, en établissant une bijection avec les couples de deux partitions en paires de l'ensemble $[n]$.

THEOREME 8.3. *Soit n un entier pair $\geqslant 0$. L'entier $b_{n,i,j}$, coefficient de $a^{2i}b^{2j}c^{n-2i-2j}u^n/n!$ dans le développement de la fonction $Cn(u; a, b, c)$, est égal au nombre de permutations de $[n]$ dont tous les cycles sont de longueurs paires, et qui possèdent i pics de cycle pairs et j pics de cycle impairs.*

Démonstration. Calculons le nombre de couples $(C_{i,j}, \sigma)$, où $C_{i,j}$ est un choix dans $[n]$ de i pics de cycle pairs et j pics de cycle impairs, et où σ est une permutation, prolongeant $C_{i,j}$, dont tous les cycles sont de longueurs paires. Rappelons que le choix $C_{i,j}$ a pour effet de partitionner $[n]$ en un certain nombre de chaînes, les unes fermées qui seront autant de cycles de longueurs paires de la permutation σ, les autres ouvertes, de longueurs impaires, et au nombre de $(n-2i-2j)$. A toute bijection des fins de chaînes ouvertes sur les débuts de chaînes ouvertes (qui, on l'a vu, étend σ à $[n]$ entier) correspond biunivoquement une permutation ω de l'ensemble $\mathcal{O}$ des chaînes ouvertes de manière évidente: si f est fin de la chaîne c, et si $\sigma(f) = d$, début de la chaîne c', alors on pose $\omega(c) = c'$. Les cycles de σ se composent, outre des chaînes fermées initiales, des réunions des chaînes ouvertes se trouvant dans un même cycle de la permutation ω. Pour que ces réunions soient toutes de longueurs paires, il faut et il suffit que les cycles de ω soient de longueurs paires, puisque les chaînes ouvertes sont de longueurs impaires. (C'est le cas dans l'exemple 7.6, où ω se compose de deux cycles de longueur 2.) L'ensemble $\mathscr{O}$ étant de cardinal $n-2i-2j$, il existe d'après le Lemme 8.2, un nombre $(1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2i-2j-1))^2$ de permutations ω qui conviennent. Le nombre de couples $(C_{i,j},\sigma)$ recherché vaut donc $(1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2i-2j-1))^2\alpha_{n,i,j}$, coefficient de $cn\,u(1-sn^2u)^{-1/2}$ d'après (8.2).

La suite du raisonnement est analogue à la démonstration du Théorème 7.7. On déduit l'identité

$$\begin{aligned}&(1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2i-2j-1))^2\alpha_{n,i,j}\\ &\quad=\sum_{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}b_{n,k,l}\qquad(2i\leqslant 2k\leqslant n,\ 2j\leqslant 2l\leqslant n),\end{aligned}\tag{8.6}$$

où $b_{n,k,l}$ désigne le nombre de permutations de $[n]$ en cycles de longueurs paires, possédant exactement k pics de cycle pairs et l pics de cycle impairs. Par le même principe d'inclusion-exclusion, on en déduit que les $b_{n,i,j}$ ont pour fonction génératrice

$$\begin{aligned}&\sum_n\sum_{i,j}b_{n,i,j}a^{2i}b^{2j}u^n/n!\\ &\quad=\frac{cn(u;a',b')}{(1-sn^2(u;a',b'))^{1/2}},\qquad\text{où}\quad a'=(a^2-1)^{1/2},\ b'=(b^2-1)^{1/2}\\ &\quad=Dn(u;1,a,b)\qquad\text{d'après (3.9)}\\ &\quad=Cn(u;a,b,1),\end{aligned}\tag{8.7}$$

d'où le résultat (après homogénéisation du développement de $Cn\,u$). ∎

Le développement se déduit donc de (8.3) en y remplaçant a^2 et b^2 par (a^2-1) et (b^2-1):

$$\begin{aligned}Cn(u;a,b,1)&=\frac{cn(u;a',b')}{(1-sn^2(u;a',b'))^{1/2}}\\ &=1+(a^2)\frac{u^2}{2!}+\begin{pmatrix}4a^2\\ +a^4+4a^2b^2\end{pmatrix}\frac{u^4}{4!}\\ &\quad+\begin{pmatrix}16a^2\\ +44a^4+104a^2b^2\\ +\ a^6+\ 44a^4b^2+16a^2b^4\end{pmatrix}\frac{u^6}{6!}+\cdots.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Remarque 8.4. Contrairement au cas des entiers $a_{n,i,j}$, nous ne disposons pas d'une récurrence linéaire simple sur les entiers $b_{n,i,j}$. Si en un certain sens le Théorème 8.3 fait pendant au Théorème 6.2, nous n'avons cependant pas pour le Théorème 8.3 de démonstration "directe", les méthodes des paragraphes 7 et 8 nous ont paru nécessaires à sa démonstration.

COROLLAIRE 8.5. *Le coefficient de* $k^{n-2j}\varphi^{n+1}/(n+1)!$ *dans le développement de* $F(\varphi, k)$ *est égal au nombre de couples* $(C_{0,j}, \sigma)$ *où* $C_{0,j}$ *est un choix de j pics de cycle impairs dans* $[n]$, *et* σ *une permutation de* $[n]$ *en cycles de longueurs paires possédant ces j pics de cycles.*

Démonstration. C'est la diagonale de (8.3) interprétée dans la démonstration du Théorème 8.3, où l'on porte $a = 0$.

COROLLAIRE 8.6. *Parmi les permutations de* $[n]$ *en cycles de longueurs paires, le nombre sécant* E_n *compte d'une part celles qui n'ont que des pics de cycle pairs, d'autre part celles qui ont* $n/2$ *pics de cycle.*

Démonstration. Pour les premières, on fait $k = 1$ dans le Corollaire 8.5, et on applique le principe d'inclusion-exclusion. En considérant le développement de $Cn(u; a, 0, 1)$, on obtient d'ailleurs une interprétation du développement de $cn\, u$, en les distinguant suivant le nombre i de pics de cycle (pairs) qu'elles possèdent.

Pour les secondes, on considère $Cn(u; 1, 1, 0)$. En considérant $Cn(u; a, 1, 0)$ on redémontre le Corollaire 6.4.

COROLLAIRE 8.7. *Le coefficient de* $b^{2j}c^{n-2j}u^n/n!$ *dans le développement de* $\frac{1}{2}sn^2(u; b, c)$ *est égal au nombre de permutations en cycles de longueurs paires de* $[n]$ *qui n'ont qu'un seul pic de cycle pair, l'entier n, et j pics de cycles impairs.*

Démonstration. Les coefficients diagonaux du développement (8.7) sont les coefficients du développement de $\frac{1}{2}sn^2(u; b, c)$.

En effet, d'après (3.9) on a

$$Cn(u; a, b, c) = (1 - a^2 sn^2(u; (b^2 - a^2)^{1/2}, (c^2 - a^2)1/2))^{-1/2}.$$

$$\frac{1}{a^2}[Cn(u; a, b, c) - 1] = \frac{sn^2(u; b', c')}{(1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2}(1 + (1 - a^2 sn^2(u; b', c'))^{1/2})}.$$

En posant $a = 0$, on trouve à droite $\frac{1}{2}sn^2(u; b, c)$.

$$\frac{1}{2}sn^2(u; b; c) = \sum_{n,j} b_{n,1,j} b^{2j} c^{n-2j} \frac{u^n}{n!} \qquad (n \text{ pair} \geqslant 2;\ 0 \leqslant 2j \leqslant n). \quad \blacksquare \tag{8.9}$$

9. Quelques aspects complémentaires

Supposons à présent que u soit une variable complexe, et posons $x_1 = sn\, u$, $x_2 = cn\, u$ et $x_3 = dn\, u$. En passant en coordonnées homogènes, soient $x_i = X_i/X_0$ $(i = 1, 2, 3)$, on voit d'après (1.7) que les fonctions elliptiques de Jacobi paramètrent une courbe projective (E) d'équations

$$\begin{aligned} X_2^2 - X_0^2 - a^2X_1^2 &= 0, \\ X_3^2 - X_0^2 - b^2X_1^2 &= 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

C'est l'intersection complète de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, et elle porte le nom de quartique elliptique, ou de biquadratique [18, p. 52].

Considérons maintenant le cas des quatre fonctions introduites en Section 3. On sait que $Sn(u; a, a, a) = u(1 - a^2u^2)^{-1/2}$ et que $Cn(u; a, a, a) = (1 - a^2u^2)^{-1/2}$. Par suite, les constantes a, b, c étant fixées arbitrairement, les séries $Sn\, u$, $Cn\, u$, $Dn\, u$ et $En\, u$ sont absolument convergentes dans le disque $|u| < \inf(1/|a|,\ 1/|b|,\ 1/|c|)$. Le point ayant pour coordonnées ces quatre séries décrit, d'après (3.3), une courbe (C) d'équations homogènes

$$\begin{aligned} X_2^2 - X_0^2 - a^2X_1^2 &= 0, \\ X_3^2 - X_0^2 - b^2X_1^2 &= 0, \\ X_4^2 - X_0^2 - c^2X_1^2 &= 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

On pourrait appeler cette courbe triquadratique, puisque c'est l'intersection complète de trois quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$. Elle est d'ailleurs bien connue en Géométrie Algébrique; de degré huit, on montre que son genre est égal à cinq [16, p. 346].

Etant données r constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_r$, on peut d'une manière générale définir $(r + 1)$ fonctions $S^{(r)}$, $C_1^{(r)}, \ldots, C_r^{(r)}$ à l'aide du système

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du} S^{(r)}(u) = C_1^{(r)}(u)\, C_2^{(r)}(u) \cdots C_r^{(r)}(u), \\ &\frac{d}{du} C_i^{(r)}(u) = a_i^2 S^{(r)}(u)\, C_1^{(r)}(u) \cdots \widehat{C_i^{(r)}(u)} \cdots C_r^{(r)}(u) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r+1}$, ces fonctions paramètrent une courbe de degré 2^r intersection complète de r quadriques. On peut montrer que son genre est égal à $1 + (r - 2)2^{r-1}$. En étendant les définitions (2.1) et (5.1) on définit de même des polynomes de Schett homogènes en $(r + 1)$ variables. Ces polynomes de Schett généralisés ne semblent guère susceptibles de s'interpréter en termes de permutations, et c'est pourquoi nous ne les avons pas introduits ici. Dans un article ultérieur [11], nous considérerons un cadre combinatoire mieux adapté à cette généralisation et permettant par ailleurs de retrouver et d'étendre un résultat de Viennot sur les fonctions de Jacobi [29].

Il reste que pour $r=3$, plusieurs problèmes restent à aborder du point de vue de la combinatoire des permutations, qui sont explicités dans l'appendice 1. En remarquant d'après (5.1) que

$$\bar{X}_n(1,1,1,1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1), \tag{9.4}$$

on est conduit à la question sans doute la plus intéressante: peut-on donner une interprétation combinatoire des coefficients des polynomes de Schett à quatre variables (visualisés dans l'appendice 2) en termes de permutations en cycles de longueur deux de $[2n]$, encore appelées involutions sans points fixes, interprétation qui serait une extension des théorèmes (6.2) et (8.3)? Dans cette direction, nous étudions les dégénérescences univariées de ces polynomes dans un article à paraître [12]. Une question annexe et non encore abordée serait d'interpréter les développements de Taylor des fonctions (A*l*) de Weierstrass [18, pp. 45–46; 30], développements qui ont suscité l'admiration de ses contemporains [2; 17, pp. 860–868].

Appendice 1

Nous donnons ici quelques développements supplémentaires aux paragraphes 7 et 8. Il serait intéressant d'étudier d'un point de vue combinatoire les séries suivantes

$$\begin{aligned}\exp(sn(u;a,b)) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} &+ \begin{pmatrix} \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!} + \begin{pmatrix} 1 \\ +4a^2+4b^2 \end{pmatrix}\frac{u^4}{4!} \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ +10a^2+10\ b^2 \\ +\ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ +20a^2+\ 20\ b^2 \\ +16a^4+104a^2b^2+16b^4 \end{pmatrix}\frac{u^6}{6!} + \cdots .\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-sn(u;a,b)} = 1 + u + 2\frac{u^2}{2!} &+ \begin{pmatrix} 6 \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!} + \begin{pmatrix} 24 \\ +8a^2+8\mathrm{b}^2 \end{pmatrix}\frac{u^4}{4!} \\ &+ \begin{pmatrix} 120 \\ +\ 60a^2+60\ b^2 \\ +\ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} \\ &+ \begin{pmatrix} 720 \\ +480a^2+480\ b^2 \\ +\ 32a^4+208a^2b^2+32b^4 \end{pmatrix}\frac{u^6}{6!} + \cdots .\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\frac{1}{1-sn(u;a',b')} = 1 + u + 2\frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} 4 \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!} + \begin{pmatrix} 8 \\ +8a^2+8b^2 \end{pmatrix}\frac{u^4}{4!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 16 \\ +44a^2+44\ \ b^2 \\ +\ \ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 32 \\ +208a^2+208\ \ b^2 \\ +\ 32a^4+208a^2b^2+32b^4 \end{pmatrix}\frac{u^6}{6!} + \cdots . \tag{A.3}$$

Les coefficients de la partie impaire de (A.3) sont ceux de la partie impaire des polynomes de Schett, les coefficients de la partie paire sont ceux de Sn^2u.

$$\frac{sn(u;a,b)}{(1-sn^2(u;a,b))^{1/2}} = u + \begin{pmatrix} 3 \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 45 \\ +30a^2+30\ \ b^2 \\ +\ \ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} + \cdots . \tag{A.4}$$

De (A.4) on déduit le développement de $Sn\,u$ en passant à a' et b'.

$$\frac{sn\,u + cn\,u\,dn\,u}{1-sn^2u} = 1 + u + \begin{pmatrix} 2 \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^2}{2!} + \begin{pmatrix} 6 \\ +a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 24 \\ +20a^2+20\ \ b^2 \\ +\ \ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^4}{4!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 120 \\ +60a^2+60\ \ b^2 \\ +\ \ a^4+14a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} + \cdots . \tag{A.5}$$

$$\frac{cn\,u\,sn\,u}{(1-sn^2u)^{1/2}} = u + \begin{pmatrix} 3 \\ +4a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{u^3}{3!}$$
$$+ \begin{pmatrix} 45 \\ +60a^2+30\ \ b^2 \\ +16a^4+44a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}\frac{u^5}{5!} + \cdots . \tag{A.6}$$

Sur les premières colonnes de (A.6), on lit les coefficients de l'intégrale de

Legendre de deuxième espèce $E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta$, qui ont été calculés par Gudermann [15, p. 73].

$$\frac{cn\, u\, sn\, u}{(1 - sn^2 u)^{3/2}} = u + \begin{pmatrix} 9 & \\ +4a^2 & +b^2 \end{pmatrix} \frac{u^3}{3!} + \begin{pmatrix} 225 & & \\ +180a^2 & +90\ \ b^2 & \\ +\ \ 16a^4 & +44a^2b^2 & +b^4 \end{pmatrix} \frac{u^5}{5!} + \cdots . \tag{A.7}$$

Sur les premières colonnes de (A.7), les coefficients de $F(\varphi, k)$. Sur les diagonales, des polynomes peut-être introduits par Comtet [9, Théorème 2] pour un problème d'évaluation asymptotique.

Appendice 2: Tables octaedrales des polynomes de Schett a quatre variables

Soit $\bar{T}_n(x, y, z, t)$ le n-ième terme de la suite des polynomes de Schett à quatre variables initialisée en t. Notons $t_{n,i,j,k,l}$ le coefficient du monôme $x^i y^j z^k t^l$ dans $\bar{T}_n$. Les quadruplets d'exposants (i, j, k, l) sont formés d'entiers compris entre 0 et n, les seules conditions étant que i, j et k sont de la parité de n, que l est de l'autre parité, et que la somme $i + j + k + l$ vaut $(2n + 1)$. On peut montrer que le nombre de ces quadruplets est égal à $n(n + 2)(2n + 5)/24$ quand n est pair, à $(n + 1)(n^2 + 2n + 3)/12$ quand n est impair. A chacun d'eux nous associons le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (i, j, l) et nous écrivons le coefficient $t_{n,i,j,k,l}$ en ce point.

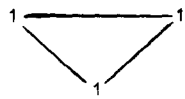
Ainsi les coefficients se répartissent dans des octaèdres. Il est commode de représenter ces octaèdres avec leurs sections par les plans horizontaux de cotes l variables. La section la plus basse est une face triangulaire de l'octaèdre qui contient les coefficients de $Sn\, u$, d'après la Proposition 5.1.

Les six faces latérales de l'octaèdre sont de deux espèces. Trois d'entre elles sont des triangles "pointes en bas"; correspondant aux valeurs minimales de i, ou de j, ou de k, elles contiennent donc les coefficients de $Cn\, u$, $Dn\, u$ et $En\, u$. Les trois autres s'appuient sur les arêtes de la base et, correspondant aux valeurs maximales de i, j ou k, contiennent les coefficients des polynomes de Schett à trois variables (Proposition 5.2).

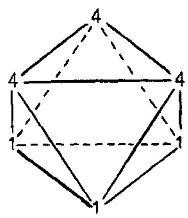
Enfin le plan horizontal supérieur est une face triangulaire si n est impair, hexagonale si n est pair; dans le premier cas l'octaèdre est régulier, dans le second, c'est un octaèdre régulier qui a été sectionné près de sa face supérieure. Cette face supérieure a pour coefficients ceux du polynome de Schett symétrique divisés par $\frac{1}{2}$ (Proposition 5.2), qui, quand n est impair, sont aussi ceux de $\frac{1}{2} Sn^2 u$ (Proposition 4.1).

1

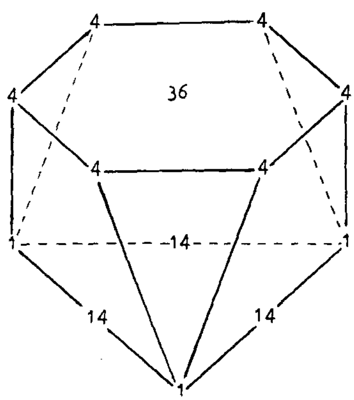
n = 1



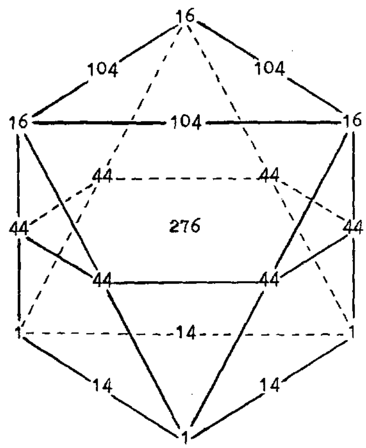
n = 2



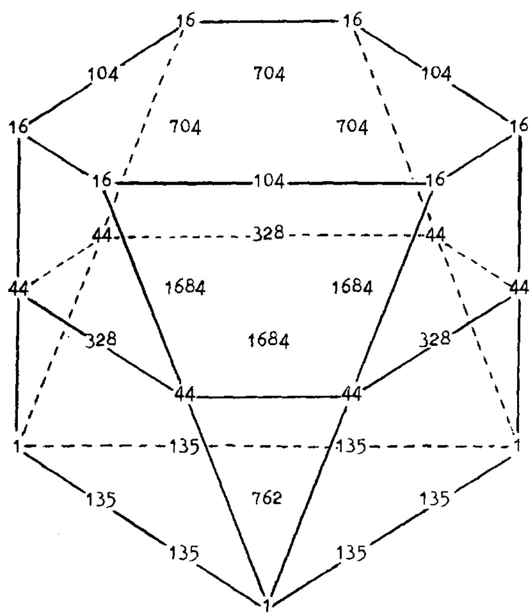
n = 3



n = 4


16
104
104
16
104
16
44
44
44
276
44
44
44
1
14
1
14
14
1

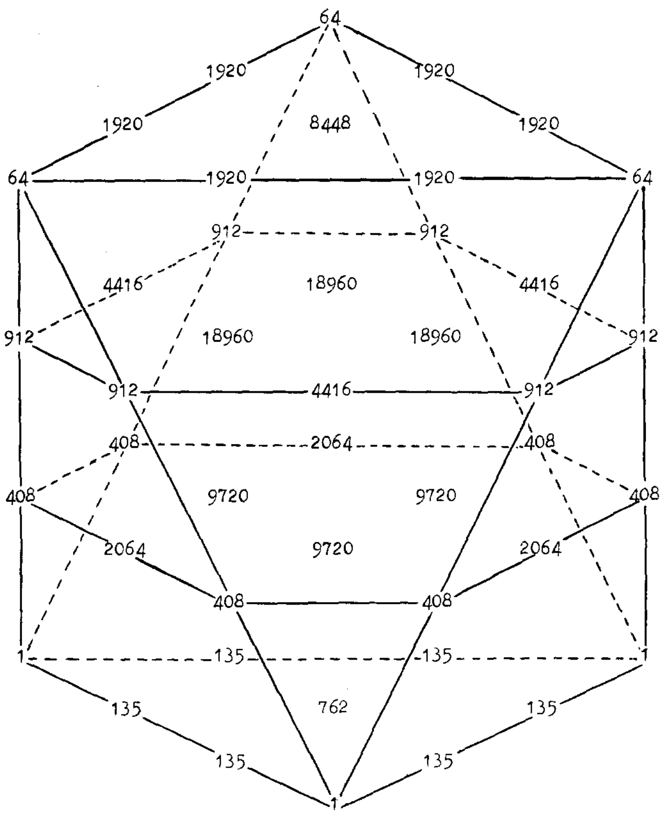
n = 5


16
16
104
704
104
16
704
704
16
16
104
16
44
328
44
44
1684
1684
44
328
1684
328
44
44
1
135
135
1
135
762
135
135
135
1

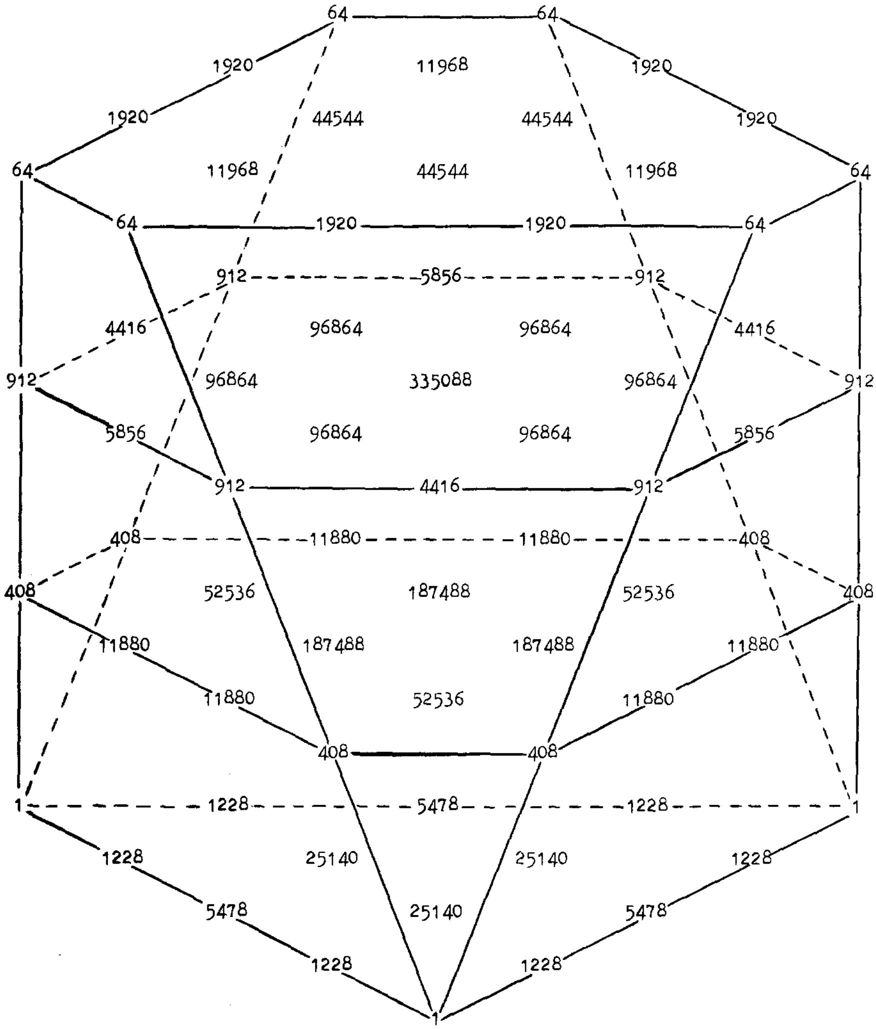
n = 6

Tandis que les arêtes de la face inférieure donnent les coefficients de *sn u* et celles des faces latérales les coefficients de *cn u*, les arêtes de la face supérieure contiennent les coefficients de $\frac{1}{2}sn^2u$, d'après la Proposition 4.1 ou le Corollaire 8.7.

EXEMPLE: $n = 4$. Face inférieure: les coefficients en $u^5/5!$ de $Sn\,u$; triangles "pointes en bas": les coefficients en $u^4/4!$ de $Cn\,u$, $Dn\,u$, $En\,u$; trapèzes latéraux: le polynome de Schett à trois variables X_4; face supérieure: le polynome de Schett symétrique $\frac{1}{2}S_4$.



n = 7



n = 8

Bibliographie

1. D. ANDRE, Développement en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances, *Ann. École Norm. Sup. Sér. 2* **6** (1877), 265–328.
2. D. ANDRE, Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable, *J. Math. Pures Appl. Sér. 3* **5** (1879), 31–46.
3. D. ANDRE, Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl. Sér. 3* **7** (1881), 167–184.

4. D. ANDRE, Mémoire sur les séquences des permutations circulaires, *Bull. Soc. Math. France* **23** (1895), 122–184.
5. P. APPELL ET E. LACOUR, "Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications," Gauthiers–Villars, Paris, 1897.
6. L. CARLITZ, Set partitions, *Fibonacci Quart.* **14** N° 4 (1976), 327–342.
7. L. CARLITZ, A special class of triangular arrays, *Collect. Math.* **27** N° 1 (1976), 1–38.
8. L. COMTET, "Analyse combinatoire," Tome 1, Presses Univ. France, Paris, 1970.
9. L. COMTET, Sur le quatrième problème et les nombres de Schröder, *C. R. Acad. Sci. Paris* **271** (1970), 913–916.
10. D. DUMONT, A combinatorial interpretation for the Schett recurrence on the Jacobian elliptic functions, *Math. Comp.* **33** (1979), 1293–1297.
11. D. DUMONT, Arbres, forêts et fonctions elliptiques, à paraître.
12. D. DUMONT, Quelques statistiques sur les involutions sans points fixes, à paraître.
13. P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.* **32** (1980), 149.
14. D. FOATA, "La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération," Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974.
15. GUDERMANN, Theorie der Modular-Funktionen und der Modular Integrale, *J. Reine Angew. Math.* **19** (1839), 45–83.
16. R. HARTSHORNE, "Algebraic Geometry," p. 346–348, Springer–Verlag, New York/Berlin, 1977.
17. C. HERMITE, "Note sur la théorie des fonctions elliptiques, ajoutée au cours de calcul différentiel et intégral de J. A. Serret," Gauthier–Villars, Paris, 1894.
18. C. HOUZEL, Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, *dans* "Abrégé d'Histoire des Mathématiques" (J. Dieudonné, Ed.) Hermann, Paris, 1978.
19. C. L. LIU, "Introduction to Combinatorial Mathematics," pp. 104–105, McGraw–Hill, New York, 1968.
20. S. C. MITRA, On the expansion of the Weierstrassian and Jacobian elliptic functions in powers of the argument, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **17** (1926), 159–172.
21. F. OBERHETTINGER ET W. MAGNUS, "Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik," Springer–Verlag, Berlin, 1949.
22. A. RENYI, "Wahrscheinlichkeitsrechnung," pp. 420–421, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
23. J. RIORDAN, "An Introduction to Combinatorial Theory," Wiley, New York, 1958.
24. J. RIORDAN, "Combinatorial Identities," Wiley, New York, 1968.
25. A. SCHETT, Properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions, *Math. Comp.* **30** (1976), 143–147.
26. A. SCHETT, Recurrence formula of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions, *Math. Comp.* **31** (1977), 1003–1005.
27. E. SPARRE-ANDERSEN, On the number of positive sums of random variables, *Skand. Aktuarictidskrift* (1949), 27–36.
28. J. F. STEFFENSEN, "Interpolation," p. 57, Chelsea, New York, 1950.
29. G. VIENNOT, Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi, *J. Combin. Theory Ser. A* **29** (1980), 121–133.
30. M. WEIERSTRASS, Theorie der Abelschen Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **52** (1856), 356–358.